Instituto Valenciano de Investigaciones Agrarias

Seminario

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA INVESTIGACIÓN AGRONÓMICA

Tema 6

ANÁLISIS DE LA VARIANZA CON UN SOLO FACTOR

Análisis de la Varianza con un solo factor

- Un ejemplo
  - Cuadro resumen del Anova
  - Análisis de residuos
  - Intervalos LSD para comparación de medias
  - Análisis de efectos sobre la varianza
- Tests para comparaciones múltiples de medias
- Contrastes ortogonales
  - Concepto de contrastes ortogonales
  - Utilización para el análisis de los efectos de un factor cuantitativo
  - Descomposición del efecto de un factor con K niveles en K-1 contrastes ortogonales: Ejemplo
  - Contrastes sugeridos por los datos: test de Scheffé

UN EJEMPLO

- Una factoría de motores tiene 2 proveedores de los cigüeñales que mecaniza. Un tercer proveedor ofrece los suyos algo más caros argumentando sus mejores propiedades dinámicas (menor equilibrado dinámico). La factoría decide hacer una prueba comparando 10 cigüeñales del nuevo proveedor (código=1) con 10 de cada uno de los proveedores tradicionales (códigos 2 y 3). Los resultados obtenidos son:

Factor estudiado (uno sólo)	PROVEEDOR		
Variantes del factor (3)	1	2	3
Resultados obtenidos (equilibrado dinámico en grs.)	23	35	50
	28	36	43
	21	29	36
	27	40	34
	95	43	45
	41	49	52
	37	51	52
	30	28	43
	32	50	44
	36	52	34

- Comparar dos a dos (mediante el test t de Student) todas las parejas de proveedores sería laborioso y aumentaría el riesgo de 1ª especie. Alternativa a utilizar ➔ **Análisis de la Varianza** (un solo factor con 3 variantes)

Cuadro Resumen del Análisis de la Varianza

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:Proveedor	207.267	2	103.633	0.53	0.5934
RESIDUAL	5258.2	27	194.748		
TOTAL (CORRECTED)	5465.47	29			

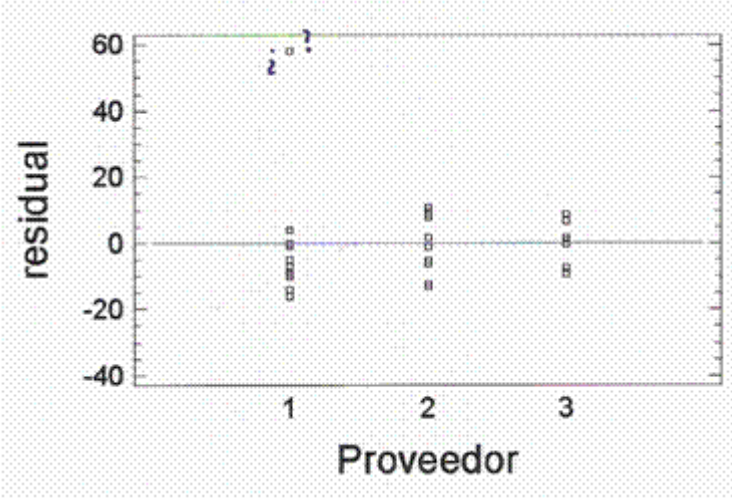
Como $F_{ratio} = 0.532 < F_{2,27}(0.05) = 3.35$ (como se constata también por el hecho de que el **p-value es superior a 0.05**) ¡el **efecto del proveedor sobre la media del equilibrado dinámico no es significativo**

La hipótesis nula de que las medias de los tres proveedores son iguales es admisible (que no es lo mismo que afirmar que es verdadera)

Sin embargo …

Análisis de los residuos

- En este caso el residuo de cada dato no es más que la diferencia entre el mismo y la media del proveedor correspondiente. En los residuos se refleja el efecto de todos los factores no controlados que pueden haber afectado a cada uno de los resultados obtenidos.



- El gráfico pone claramente de manifiesto la existencia de una observa-ción anómala para el Proveedor 1, que se refleja en un residuo de valor casi igual a 60, mucho más elevado que cualquier otro de los obtenidos.
- Estudiando los datos introducidos, que son con los que ha operado el programa, se encuentra que el quinto dato del Proveedor 1 se ha introducido como 95, en vez de como 35 que era su valor correcto

ANOVA tras corregir el dato erróneo

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:Proveedor	871.267	2	435.633	7.65	0.0023
RESIDUAL	1538.2	27	56.9704		
TOTAL (CORRECTED)	2409.47	29			

- Como puede constatarse las conclusiones son ahora distintas, detectándose un efecto significativo estadísticamente (**p-value=0.0023**) del factor Proveedor
- **¡Una sola observación anómala puede invalidar por completo todas las conclusiones de un análisis!**

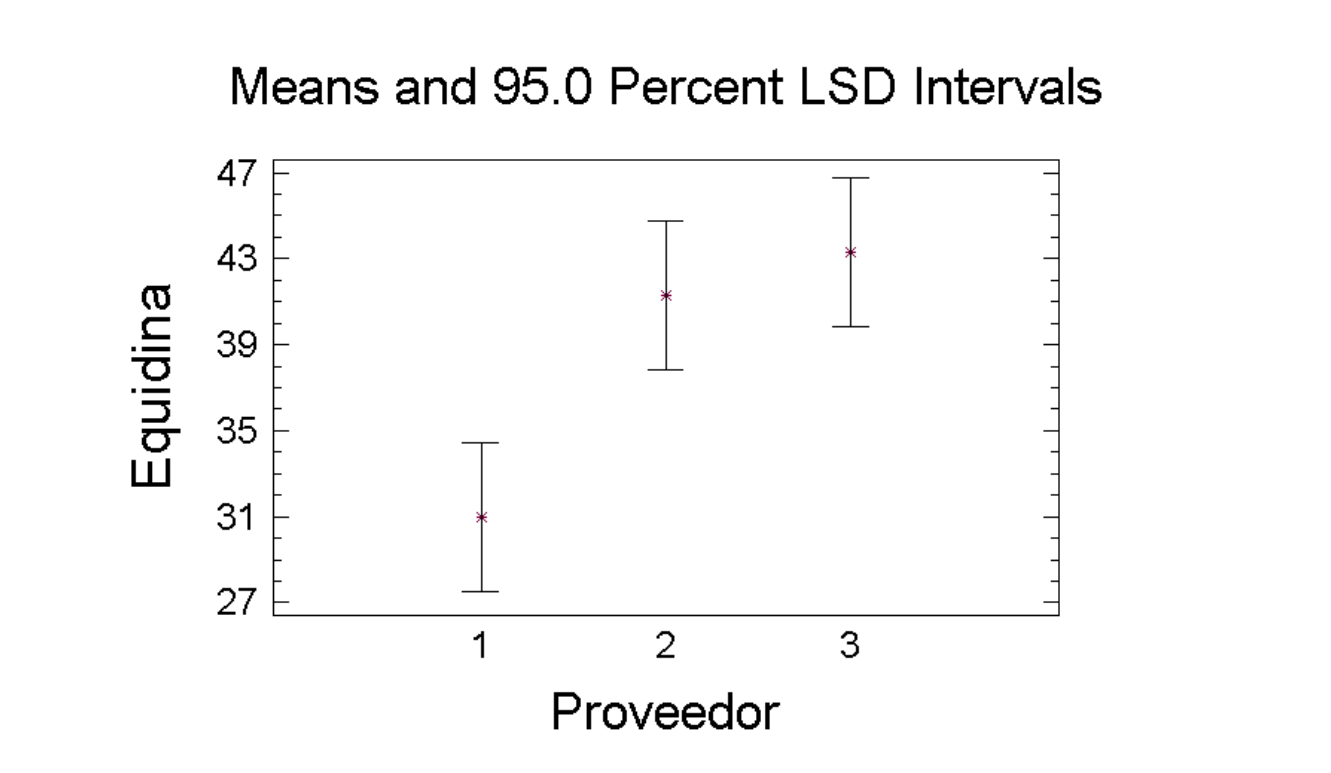
Comparación de medias: Intervalos LSD

- Cuando el test F resulta significativo, hay que precisar entre cuáles de las variantes del factor (en nuestro ejemplo, entre qué proveedores) existen diferencias significativas en las medias.
- En efecto, un valor significativo de la F-ratio sólo indica que al menos una de las tres medias difiere de las restantes, pero no precisa cuáles son las que difieren entre sí
- Una forma sencilla de precisar esta cuestión es mediante el establecimiento de intervalos LSD (siglas de "Least Signficative Difference") para la media de cada variante. La fórmula de ese intervalo para la media del Proveedor i es:

$$\bar{x}_i \pm \frac{\sqrt{2}}{2} t^{\alpha}_{glresid} \sqrt{\frac{CM_{resid}}{n}}$$

- **La diferencia entre la media de dos tratamientos será significativa si los respectivos intervalos LSD no se solapan.**
- Más adelante se discuten otras alternativas al uso de intervalos LSD

Comparación de tres proveedores: Gráfico de intervalos LSD



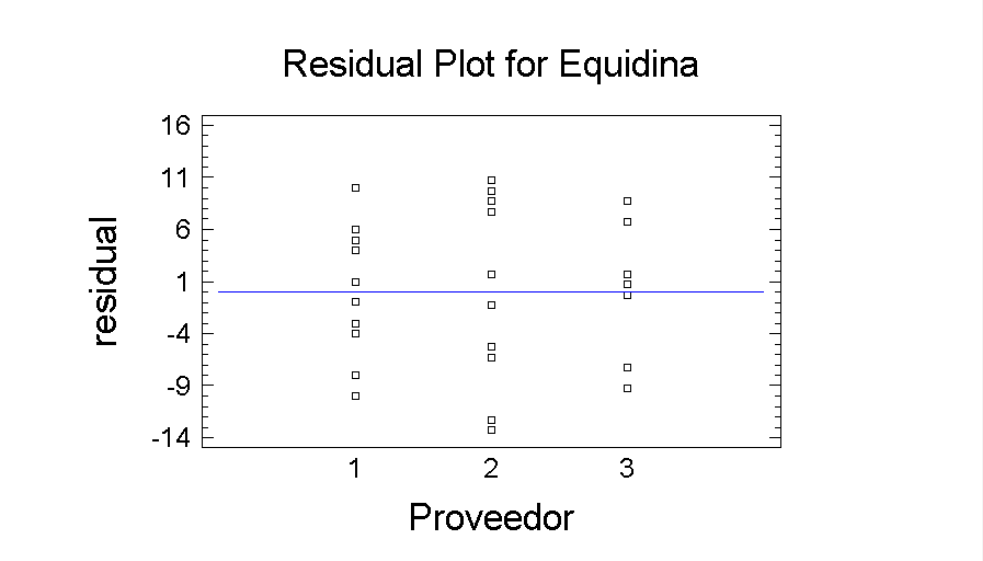
Se constata que existe una diferencia significativa entre la media del Proveedor 1 y las de los otros dos proveedores, no siendo significativa la diferencia al respecto entre estos dos últimos.

ANÁLISIS DE EFECTOS SOBRE LAS VARIANZAS

- Además de estudiar si existen diferencias entre los valores medios de los equilibrados dinámicos para los cigüeñales de los tres proveedores, también puede ser interesante analizar si existen diferencias entre proveedores respecto a la varianza de los equilibrados.
- Existen diversos procedimientos estadísticos aproximados que pueden utilizarse para contrastar la hipótesis de igualdad de K varianzas(vg. tests de Bartlett y Hartley). Sin embargo estos tests (aparte de implicar la necesidad de aprenderse un nuevo procedimiento estadístico) no son aplicables para el estudio simultáneo de los efectos sobre la dispersión de varios factores y exigen necesariamente la existencia de replicaciones para cada tratamiento.
- Hemos propuesto un método aproximado que, además de no exigir el aprendizaje de ninguna técnica nueva, se generaliza de forma inmediata para el estudio simultáneo de varios factores, incluso en ausencia de replicaciones.
- Seguidamente se exponer el fundamento y la forma de operar con este procedimiento

Estudio de efectos sobre las varianzas: idea intuitiva

- Gráfico de los residuos del Anova (tras corregir dato erróneo)



- ¿Cómo sería el gráfico si, por ejemplo, en el Proveedor 1 los equilibrados tuvieran menor varianza que en los otros dos proveedores?
- ¿Existe alguna relación entre la media aritmética de los cuadrados de los residuos de un proveedor y la s^2 constatada para dicho proveedor?
- ¿Conoces una técnica estadística que sea muy poderosa para estudiar si existen diferencias entre las medias de una variable (que puede ser, por ejemplo, definida como el cuadrado de los residuos), en distintas poblaciones?

Estudio de efectos sobre las varianzas: Operativa

- Del razonamiento anterior se deduce que una forma aproximada, pero extremadamente sencilla y poderosa, de estudiar los posibles efectos sobre la varianza del factor estudiado, consiste en llevar a cabo un Anova usando como datos a analizar los cuadrados de los residuos obtenidos en el Anova realizado para estudiar sus efectos sobre la media.
- Pasos a seguir:
  - Realizar el Anova habitual, utilizando como respuesta los datos originales, para estudiar los efectos del Factor sobre las medias
  - Obtener los residuos de ese Anova
  - Elevar al cuadrado dichos residuos
  - Realizar un nuevo Anova de la forma habitual, pero utilizando como variable respuesta en cada observación el cuadrado del residuo obtenido en la misma
  - En el caso de que el nuevo Anova resulte significativo, precisar entre qué variantes del factor hay diferencias de varianza operando de forma similar a como se ha hecho para las medias (intervalos LSD)

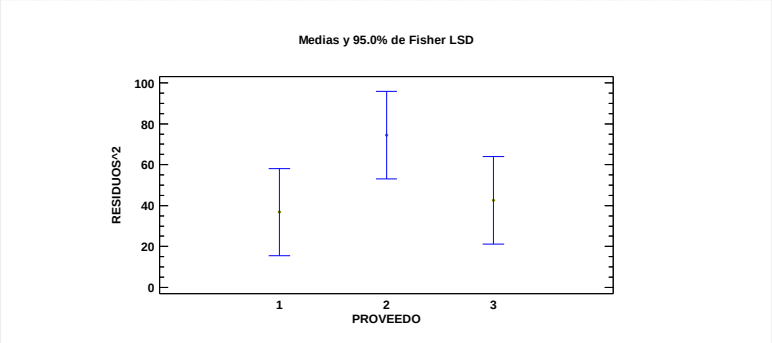
Comparación de tres proveedores: análisis de efectos sobre las varianzas

- Cuadro resumen del Anova utilizando como variable respuesta el cuadrado de los residuos del Anova inicial

```
Analysis of Variance for RESIDUOS^2
--------------------------------------------------------------------------------
Source                 Sum of Squares     Df    Mean Square    F-Ratio    P-Value
--------------------------------------------------------------------------------
MAIN EFFECTS
 A:Proveedor                 8198.36      2        4099.18       1.89     0.1707

RESIDUAL                     58587.0     27        2169.89
--------------------------------------------------------------------------------
TOTAL (CORRECTED)            66785.4     29
--------------------------------------------------------------------------------
```

- Como p-value = 0.1707 es > 0.05 ➔ la **hipótesis nula** de que las varianzas de las tres poblaciones son iguales es **aceptable** (No existen diferencias estadísticamente significativas entre las tres varianzas)
- Si se hubiese rechazado H_0 se habría construido el gráfico de intervalos LSD para precisar las diferencias de varianzas



Tests de comparaciones múltiples de medias

- Cuando el efecto de un factor **cualitativo** con K variantes resulta significativo en el Anova, se plantea la cuestión de concretar entre qué parejas de medias existen diferencias significativas
- La construcción de intervalos LSD, expuesta anteriormente, es un posible procedimiento al respecto.
- Con este procedimiento, para una pareja de medias elegida al azar el riesgo de 1ª especie (probabilidad de concluir $m_i \neq m_j$ cuando realmente $m_i = m_j$) se mantiene al nivel prefijado α
- Sin embargo, como se realizan varias comparaciones de este tipo (por ejemplo, 6 si K = 4) la probabilidad de cometer **al menos un error** de 1ª especie es más elevado que α
- Por ello se recomienda a veces utilizar otros procedimientos más conservadores que intentan garantizar que la probabilidad de cometer al menos un error de 1ª especie no superar el valor de α
- Con carácter general, cuanto más conservador es un procedimiento, menos potente es, en cambio, para detectar como significativa las diferencias que realmente existen

Algunos tests de comparaciones múltiples de medias

- Test de **Bonferroni**: es un test muy conservador que para garantizar un riesgo global de 1ª especie < α, utiliza como nivel de significación al comparar cada pareja con el test de Student el valor α/M, siendo M el número total de comparaciones a realizar
- Test de **Tukey** (también denominado **HSD**): es similar en su operativa al test LSD, pero en vez de utilizar la t de Student para construir los intervalos utiliza la distribución **q** del "rango estudentizado" de K observaciones
- Tests que al comparar dos medias utiliza un intervalo crítico que depende del número de medias situadas entre ambas una ver ordenadas de menor a mayor. En general son menos conservadores que los dos anteriores:
  - Test de **Bonferroni-Holm**
  - Test de **Newman-Keuls**
  - Test de **Duncan**
- Test de **Dunnett**: se utiliza en el caso particular de que uno de los K tratamientos sea un testigo y el objetivo perseguido sea sólo la comparación de cada uno de los K-1 tratamiento restantes con el testigo

Tests de comparaciones múltiples: Ejemplo

- Se comparan los rendimientos medios de 5 variedades (A, B, C, D y E) en un diseño al azar con 4 réplicas por variedad. Los datos están en *tema_6.sgd* y el cuadro resumen del Anova es:

Fuente	*Suma de Cuadrados*	*Gl*	*Cuadrado Medio*	*Razón-F*	*Valor-P*
variedad	1313.8	4	328.45	7.63	0.0015
residual	646.0	15	43.0667		
TOTAL	1959.8	19			

- Como p-val = 0.0015 < 0.05 se rechaza la H_0: $m_A = m_B = \ldots = m_E$ y se deduce, en consecuencia, que al menos dos medias son diferentes
- Con el fin de precisar entre qué parejas de medias la diferencia es "estadísticamente significativa" pueden utilizarse diferentes procedimientos más o menos conservadores respecto al riesgo de que "al menos una de las diferencias detectada como significativa no lo sea en realidad"
- Seguidamente se recogen las conclusiones obtenidas, utilizando Statgraphics, según el procedimiento utilizado

Conclusiones utilizando el test LSD

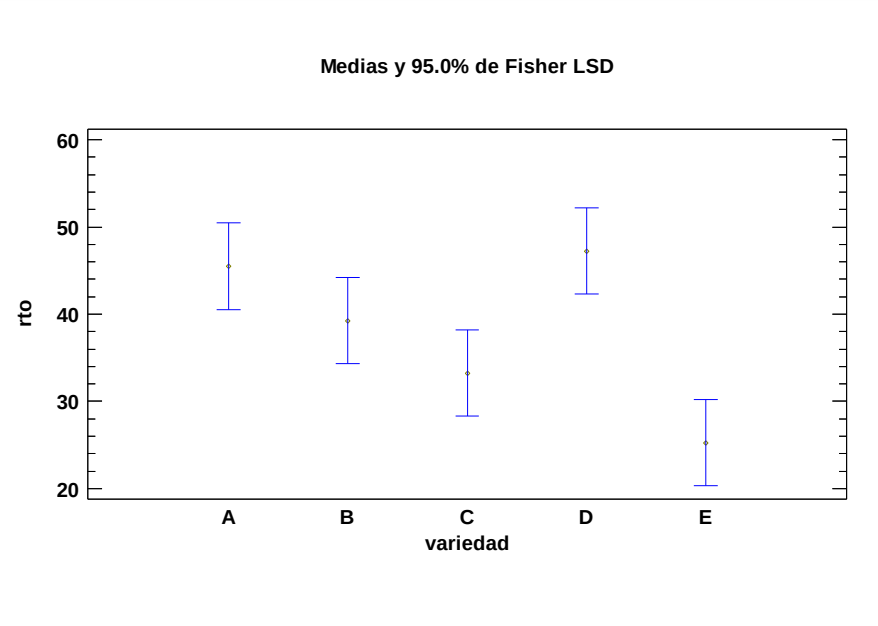
- Este test es el menos conservador (mayor probabilidad de cometer algún error de 1ª especie) pero, como contrapartida, es el más potente (mayor probabilidad de detectar como significativas las diferencias que realmente existen)

Método: 95.0 porcentaje LSD

variedad	*Casos*	*Media LS*	*Sigma LS*	*Grupos Homogéneos*
E	4	25.25	3.28126	X
C	4	33.25	3.28126	XX
B	4	39.25	3.28126	XX
A	4	45.5	3.28126	X
D	4	47.25	3.28126	X

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*	*+/- Límites*
A - B		6.25	9.8908
A - C	*	12.25	9.8908
A - D		-1.75	9.8908
A - E	*	20.25	9.8908
B - C		6.0	9.8908
B - D		-8.0	9.8908
B - E	*	14.0	9.8908
C - D	*	-14.0	9.8908
C - E		8.0	9.8908
D - E	*	22.0	9.8908

* indica una diferencia significativa.



Conclusiones utilizando el test HSD de Tukey

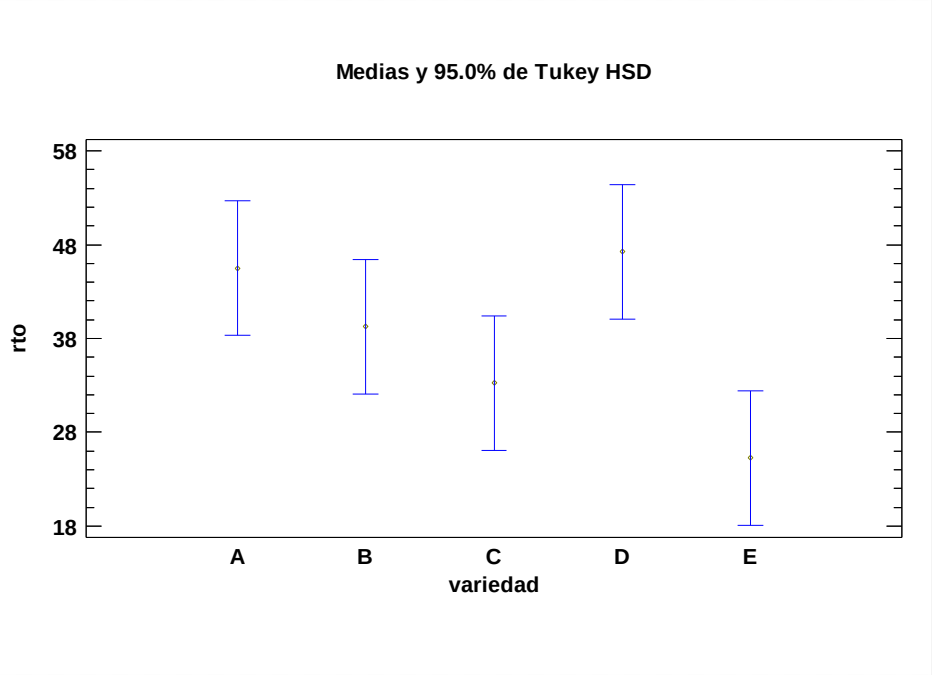
- Este test es más conservador que el LSD (menor probabilidad de cometer algún error de 1ª especie) pero, como contrapartida, es menos potente (menor probabilidad de detectar como significativas las diferencias que realmente existen)

Método: 95.0 porcentaje Tukey HSD

variedad	*Casos*	*Media LS*	*Sigma LS*	*Grupos Homogéneos*
E	4	25.25	3.28126	X
C	4	33.25	3.28126	XX
B	4	39.25	3.28126	XX
A	4	45.5	3.28126	X
D	4	47.25	3.28126	X

Contraste	*Sig.*	*Diferencia*	*+/- Límites*
A - B		6.25	14.3801
A - C		12.25	14.3801
A - D		-1.75	14.3801
A - E	*	20.25	14.3801
B - C		6.0	14.3801
B - D		-8.0	14.3801
B - E		14.0	14.3801
C - D		-14.0	14.3801
C - E		8.0	14.3801
D - E	*	22.0	14.3801

* indica una diferencia significativa.



Conclusiones utilizando otros procedimientos

- **Test de Bonferroni**: este procedimiento es el más conservador de todos. En este caso sus conclusiones coinciden con las del test de Tukey

Método: 95.0 porcentaje Bonferroni

variedad	*Casos*	*Media LS*	*Sigma LS*	*Grupos Homogéneos*
E	4	25.25	3.28126	X
C	4	33.25	3.28126	XX
B	4	39.25	3.28126	XX
A	4	45.5	3.28126	X
D	4	47.25	3.28126	X

- **Test de Newman-Keuls**: es intermedio entre el test LSD y el de Tukey. En este caso sus conclusiones coinciden con las del test LSD

Método: 95.0 porcentaje Student-Newman-Keuls

variedad	*Casos*	*Media LS*	*Sigma LS*	*Grupos Homogéneos*
E	4	25.25	3.28126	X
C	4	33.25	3.28126	XX
B	4	39.25	3.28126	XX
A	4	45.5	3.28126	X
D	4	47.25	3.28126	X

- **Test de Duncan**: es intermedio entre el test LSD y el de Tukey. En este caso sus conclusiones coinciden con las del test LSD

Método: 95.0 porcentaje Duncan

variedad	*Casos*	*Media LS*	*Sigma LS*	*Grupos Homogéneos*
E	4	25.25	3.28126	X
C	4	33.25	3.28126	XX
B	4	39.25	3.28126	XX
A	4	45.5	3.28126	X
D	4	47.25	3.28126	X

CONTRASTES

- Un **contraste** entre I medias es una **combinación lineal** de estas medias cuyos **coeficientes suman cero**

$$z = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \bar{x}_i \quad \text{con la condición} \quad \sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 0$$

- En muchas situaciones una hipótesis nula de interés es que el valor medio poblacional de cierto contraste es cero
- **Ejemplo 1**: Con I = 4 la H_0 $m_1 = m_2$ equivale a $m_1 - m_2 = 0$ y por tanto al contraste

$$z = +1 \times m_1 - 1 \times m_2 + 0 \times m_3 + 0 \times m_4 \text{ que es un contraste de coeficientes } \lambda = [+1\ -1\ 0\ 0]$$

- **Ejemplo 2**: a la hipótesis de que m_1 es igual a la media de los rendimientos de las otras tres variedades le corresponde el contraste

$$z = m_1 - \frac{m_2 + m_3 + m_4}{3} \quad \Rightarrow \quad 3m_1 - m_2 - m_3 - m_4 \text{ que es un contraste con } \lambda = [3\ -1\ -1\ -1]$$

Contrastes: suma de cuadrados asociada

- Si la H_0 global $m_1 = m_2 = \ldots = m_I$ es cierta , la H_0 asociada a cualquier contraste $\sum \lambda_i m_i$ es necesariamente cierta. (¿Por qué?)
- A cada contraste **z** le corresponde una parte de la Suma de Cuadrados del factor en el Anova, parte que viene dada por la expresión

$$SC_z = \frac{nZ^2}{\sum \lambda_i^2}$$

- y tiene 1 grado de libertad
- La significación estadística de la H_0 asociada a un contraste puede estudiarse dividiendo esa SC_z por el $CM_{residual}$ y comparando el resultado con el valor crítico de una $F_{1,glresid}$

Contrastes ortogonales

- Dos contrastes

$$z_1 = \sum_i \lambda_{1i} \bar{x}_i \qquad y \qquad z_2 = \sum_i \lambda_{2i} \bar{x}_i$$

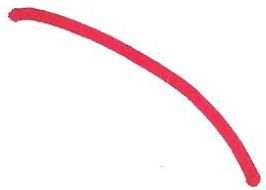
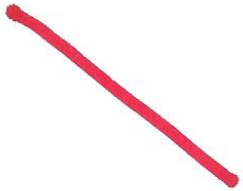
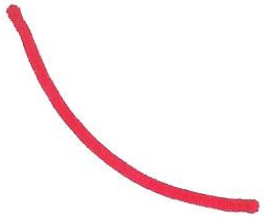
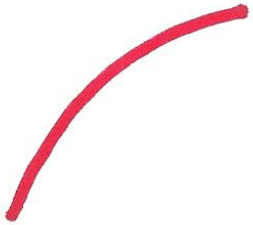
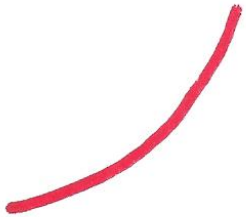
- son **ortogonales** si se cumple $\sum_i \lambda_{1i} \lambda_{2i} = 0$

- Si dos contrastes son ortogonales, las sumas de cuadrados asociadas a los mismos son **independientes**
- En general es posible particionar la SC de un factor con K variantes, que tiene K-1 grados de libertad, en la suma de las SC asociadas a K-1 contrastes ortogonales (cada una con 1 grado de libertad)
- Esta forma de operar es especialmente recomendable en el análisis del efecto de factores de naturaleza cuantitativa

Análisis del efecto de factores de naturaleza cuantitativa

- Un factor se dice que es de naturaleza cuantitativa, si sus diferentes variantes corresponden a diferentes niveles de una determinada magnitud (diferentes temperaturas, diferentes dosis, etcétera...)
- En general el estudio del efecto de un factor cuantitativo, no persigue como objetivo la comparación de los niveles concretos ensayados, sino la investigación de la naturaleza de la función de respuesta que relaciona el valor medio de la variable estudiada con el nivel del factor ensayado.
- Por ejemplo, al estudiar el efecto de la temperatura ambiental en la longevidad de un parasitoide interesa responder a preguntas como:
  - ¿Afecta la temperatura (en el margen de valores estudiados) a la longevidad? (En principio el test F del Anova permite contestar esta cuestión)
  - En el margen de valores estudiado ¿existe un efecto lineal positivo (o negativo) de la temperatura, es decir una tendencia a crecer (o a decrecer) la longevidad al aumentar la temperatura?
  - ¿Existe también un efecto cuadrático de la temperatura? (por ejemplo, a medida que aumenta la temperatura la disminución de la longevidad es cada vez menos marcada, lo que implicaría un efecto cuadrático positivo)

Diferentes formas de la función de respuesta en función del signo de los efectos lineal y cuadrático

	Efecto cuadrático < 0	Efecto cuadrático = 0	Efecto cuadrático > 0
Efecto lineal < 0			
Efecto lineal = 0			
Efecto lineal > 0			

Análisis del efecto de factores de naturaleza cuantitativa: uso de contrastes ortogonales

- Si el factor estudiado es cuantitativo **no deben compararse sus niveles (mediante intervalos LSD),** sino que debe estudiarse la naturaleza de su efecto utilizando la técnica de **descomponer la SC_{Factor} en términos**, cada uno con 1 grado de libertad, asociados a las componentes lineal, cuadrática y de orden superior del efecto
- La descomposición es sencilla si los niveles del factor están equiespaciados, y se basa en obtener los valores de componentes asociadas a los diferentes términos (lineal, cuadrático, cúbico,...) del efecto del factor.
- A cada componente le corresponde un **contraste** cuyos coeficientes λ_i se recogen en la tabla siguiente para los casos más habituales

	3 niveles			4 niveles				5 niveles				
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$
Comp. Lineal	-1	0	1	-3	-1	1	3	-2	-1	0	1	2
Comp. Cuadrática	1	-2	1	1	-1	-1	1	2	-1	-2	-1	2
Comp. Cúbica	-	-	-	-1	3	-3	1	-1	2	0	-2	1

- No se suelen estudiar los efectos de orden mayor que 3 pues rara vez son significativos

Ejemplo

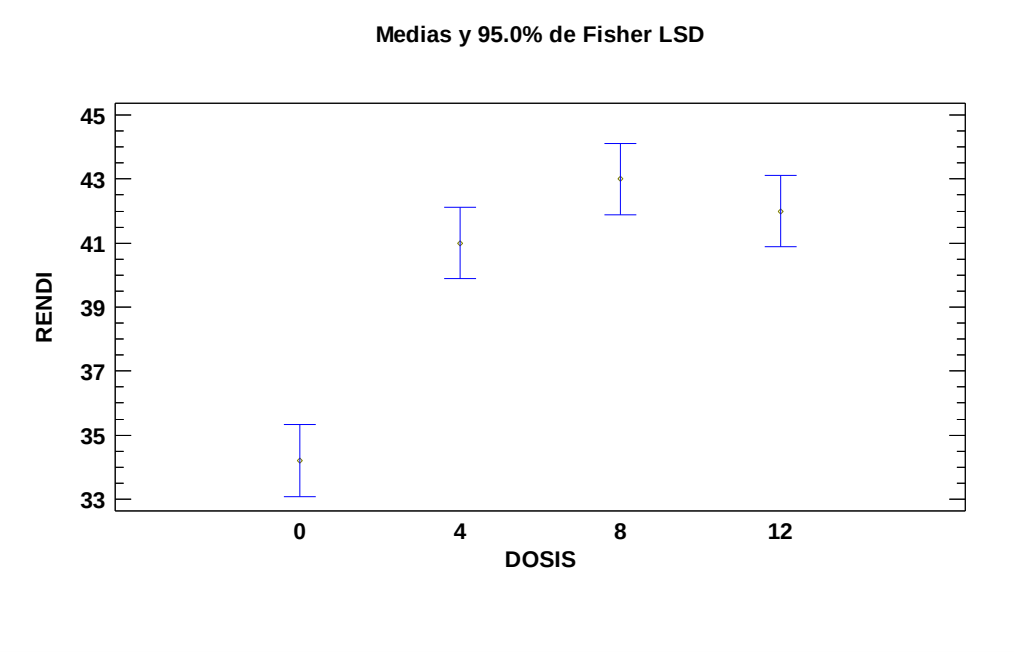
- Rendimiento en azúcar (Qm/acre) en 20 parcelas en las que se utilizaron 4 dosis diferentes de un abono complejo (0, 4, 8 y 12 Qm/acre)

	0 Qm/a	4 Qm/a	8 Qm/a	12 Qm/a
	37	39	45	42
	35	42	41	44
	33	41	44	40
	34	43	43	43
	32	40	42	41
Medias:	34.2	41	43	42

- Cuadro resumen del Anova -

Origen	S. C.	g. l.	C. M.	$F_{calculada}$	
Total	282.96	19	-	-	
Dosis	238.15	3	79.38	28.35*	*** significativa**
Residual	44.8	16	2.80	-	

- ¿Qué conclusiones se obtendrían analizando las diferencias entre dosis mediante intervalos LSD o mediante el test de Tukey?
- Descomponer el efecto de la dosis de abonado en sus componentes lineal, cuadrática y cúbica y estudiar la significación de cada una de ellas
- ¿Afecta la dosis de abonado a la varianza del rendimiento?



Sólo son significativas la diferencia entre Dosis=0 y las restantes dosis, no siendo significativas las diferencias entre éstas

Ef. Lineal: = -3x34.2 - 1x41 + 1x43 + 3x42 = **25.4** $SC_{Lin} = (5x25.4^2) / 20 =$ **161.29**

Ef. Cuadr.: = 1x34.2 - 1x41 - 1x43 + 1x42 = **-7.8** $SC_{Cua} = (5x(-7.8)^2) / 4 =$ **76.05**

Ef. Cúbico: = -1x34.2 + 3x41 - 3x43 + 1x42 = **1.8** $SC_{Cúb} = (5x1.8^2) / 20 =$ **0.81**

Puede constatarse que 161.29+76.05+0.81 = 238.15 coincide exactamente con la Suma de Cuadrados del factor Dosis.

- Nuevo Anova -

Origen	S. C.	g. l.	C. M.	F_{ratio}	
Dosis	238.15	3	-	-	
Lineal	161.29	1	161.29	57.6	Signif. 99%
Cuadrático	76.05	1	76.05	27.2	Signif. 99%
Cúbico	0.81	1	0.81	0.3	No Signif.
Residual	44.8	16	2.80	-	

Descomposición del efecto de un factor con K niveles en K-1 contrastes ortogonales: Ejemplo

- Se realizó un experimento para estudiar si al añadir cierto producto (Pl) a distintas dosis a un fungicida (Tb) utilizado en arrozales se conseguía un efecto adicional herbicida
- La variable respuesta analizada es el número de plantas (malas hierbas) contadas en cada Plot, siendo el objetivo reducir ese número
- Se realizaron 4 réplicas de cada uno de los 5 tratamientos siguientes
  - 1. Control (control)
  - 2. Tb+Pl rate 100 (TbPl100)
  - 3. Tb+Pl rate 200 (TbPl200)
  - 4. Tb+Pl rate 300 (TbPl300)
  - 5. Tb solo (Tb)
- Los resultados obtenidos se recogen en el archivo *tema_6,xls*

- Cuestión previa: ¿se considera necesario transformar la variable respuesta antes de realizar el Anova?

Ejemplo (continuación)

- Realizar el Análisis de la Varianza de los datos
- ¿Qué conclusiones se obtienen analizando los resultados mediante las diferentes alternativas para comparaciones múltiples de medias?
- Los 5 tratamientos pueden agruparse en 2 grupos: Grupo A: tratamientos sin Pl (control y Tb) Grupo B: tratamientos con Pl (a 3 niveles de "rate")
- Descomponer el efecto del factor en las componentes asociadas a los siguientes contrastes:
  - Diferencia entre el promedio del Grupo A (sin Pl) y el del Grupo B (con Pl)
  - Diferencia dentro del Grupo A (entre control y Tb)
  - Efecto lineal de "rate" (dosis) dentro del Grupo B
  - Efecto cuadrático de "rate" (dosis) dentro del Grupo B
- Estudiar la significación estadística de cada componente
- Conclusiones del experimento

Contrastes sugeridos por los datos: Test de Scheffé

- Los contrastes de los ejemplos anteriores derivaban de la estructura de los tratamientos, pudiendo establecerse su posible interés antes de realizar el experimento
- En ciertos casos las medias observadas presentan una estructura (por ejemplo, ciertos agrupamientos) que sugieren comparaciones que podrían analizarse mediante los correspondientes contrastes. Se habla entonces de **contrastes sugerido por los datos**
- En estos casos hay que ser más estrictos para establecer la significación estadística de estos contrastes, utilizando el **test de Scheffé**
- Para que la F_{ratio} asociada a uno de estos contrastes entre I medias sea significativa debe ser mayor que

$$(I-1)F^{\alpha}_{I-1,gl_{resid}}$$

- Nota: obsérvese que este test es más estricto que el utilizado para determinar la significación de contrastes no sugeridos por los datos, porque siempre es

$$(I-1)F^{\alpha}_{I-1,gl_{resid}} > F^{\alpha}_{1,gl_{resid}}$$